تمرين الأول: (04 نقاط)

معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ للفضاء نعتبر النقاط : $A(0;0;2)$ ، $B(0;4;0)$ وَ $C(2;0;0)$

1) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) ؛ ثمّ احسب بُعد النقطة O عن المستوي (ABC) .

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و العمودي على (BC).

3) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (P).

4) ماذا يمثّل المستقيم (Δ) في المثلّث ABC .

5) بيّن أنّ الجملة: $\begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (d) المتوسط المار من B في المثلث ABC .

6) بيّن أنّ إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) هي $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

7) بيّن أنّ النّقطة H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC).

8) احسب من جديد بُعد النّقطة O عن المستوي (ABC).

لتمرين الثاني: (05نقاط)

1) عين العددين المركبين α وَ β حيث: $\begin{cases} 3\alpha+i\beta=2-5i \\ \overline{\alpha}+i\,\overline{\beta}=-2-i \end{cases}$ حيث $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A وَ B نقطتان لاحقتاهما: $z_A=-i$ وَ $z_B=-2-2i$

أ. أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب. أحسب العدد $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2016}$.

ج. عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{n}$ حقيقيا .

3) z عدد مركب صورته M حيث $z\neq-2-2i$ و z' عدد مركب حيث: $z'=\frac{z+i}{z+2+2i}$

أ. عبر هندسيا عن طويلة z' بدلالة AM وَ BM، ثم استنتج (E) مجموعة النقط M حتى يكون $|z'|=1$. أرسم المجموعة (E).

ب. عبر هندسيا عن عمدة z' بدلالة $\overrightarrow{AM}$ وَ $\overrightarrow{BM}$ ، استنتج (F) مجموعة النقاط M حيث يكون z' تخيليا صرفا، أرسم المجموعة (F).

ج. أحسب لاحقة كل من C وَ D نقطتي تقاطع (E) وَ (F).

د. عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث: (5,5 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بالدستور: $f(x)=x+2-2\ln|2x+1|$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. خذ $\|\vec{i}\|=1cm$

.I

1. احسب نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\frac{1}{2}$ واستنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f).
2. ادرس تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها.
3. أحسب إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.
4. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 وأكتب معادلته.
5. أحسب $f(-1)$ و $f(0)$، أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).
6. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m. عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

II. نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة: $F(x)=-2x+(2x+1)\ln(2x+1)$

1. بيّن أن الدالة F أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة: $h:x\mapsto 2\ln(2x+1)$.
2. احسب بالسنتمتر المربع المساحة A للحيّز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذو المعادلتين $x=\frac{3}{2}$ و $x=0$.

III. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي: $g(x)=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|-\ln(2x+1)^2$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $-\frac{1}{2}$ يكون لدينا: $-1-x\neq-\frac{1}{2}$ و $g(-1-x)=g(x)$
2. استنتج أن (Γ) المنحنى الممثل للدالة g يقبل محور تناظر يطلب تعيين معادلته.
3. أثبت أن $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تعيينه.
4. استنتج إنشاء (Γ) انطلاقا من (C_f)، ارسم (Γ) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع: (5,5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ $u_1=\frac{3}{2}$ ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n. $\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$
3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ و $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}$

اعتمادا على النتيجة التالية: من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

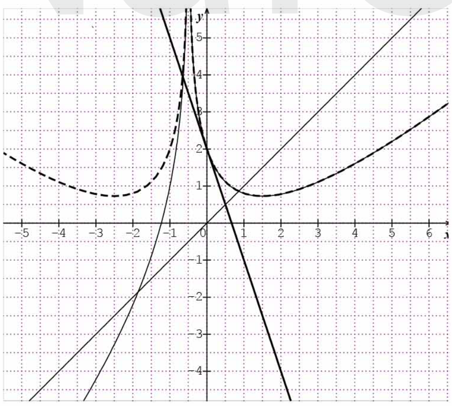
بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq\ln u_n\leq S_n$

4. عبّر بدلالة n عن كل من المجموعين S_n و T_n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.
5. أ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب) نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $w_n\leq v_n$: من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\lim\limits_n w_n\leq\lim\limits_n v_n$

." علما أن (u_n) متقاربة نحو العدد l، بين أن: $\frac{5}{6}\leq\ln l\leq1$، ثم استنتج حصرا للعدد l.

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
		التمرين الأول: 04 نقاط
04 نقاط	0,5 0,5	1) معادلة للمستوي (ABC): $2x+y+2z-4=0$ المسافة بين O وَ (ABC) هي: $d(O;(ABC))=\frac{4}{3}$
	0,5	2) معادلة ديكارتية للمستوي (P): $x-2y=0$
	0,5	3) تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (P). $\begin{cases} x=4t \\ y=2t \\ z=-5t+2 \end{cases}$ مع $t\in R$
	0,25	4) (Δ) هو العمود النازل من A في المثلث ABC.
	0,25+0,25	5) التحقق من أن إحداثيات كلا من النقطتين B وَ $I(1;0;1)$ منتصف القطعة $[AC]$ تحققان الجملة.
	0,5	6) إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) هي: $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$
	0,5	7) $H\in(ABC)$ وَ $\overrightarrow{OH}$ يعامد (ABC).
	0,25	8) $d(O;(ABC))=OH=\frac{4}{3}$
		التمرين الثاني: 05 نقطة
05 نقاط	0,5	1) $\alpha=1-i$ وَ $\beta=-2+i$
	0,25+0,25 0,5 0,5	2) أ) $z_A=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ وَ $z_B=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ ب) $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2016}=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2016}=e^{504i}=1$ ج) $\left(\frac{2\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا معناه $\frac{n\pi}{4}=2k\pi$ مع $k\in Z$ أي $n=8k$.
	0,5 0,5 0,5 0,5	3) أ) $\lvert\omega'\rvert=\frac{\lvert\omega+i\rvert}{\lvert\omega+2+2i\rvert}=\frac{AM}{BM}$ $\lvert\omega'\rvert=1$ معناه $AM=BM$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ + رسم (E) ب) $\arg(\omega')=\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)$ $\omega'\in iR$ معناه $\begin{cases} \left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ M\neq A\,;\,M\neq B \end{cases}$ مع $k\in Z$ مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A وَ B + رسم (F)

	0,5 0,5	$\lvert\omega'\rvert=1$ و $\omega'\in iR$ معناه $\omega'=i$ أو $\omega'=-i$ أي $\omega=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ أو $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ وبالتالي: $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ و $z_D=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ د) $ABCD$ مربعا (مع التعليل)
		التمرين الثالث: 5,5 نقطة
5,5 نقاط	0,25+0,25	(1 $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=\frac{3}{2}-2\ln(0^+)=+\infty$. للمنحني (C_f) مستقيم مقارب معادلته $x=-\frac{1}{2}$
	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25	(2 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{+\infty}(2x+1)\left(\frac{x+2}{2x+1}-2\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\right)=+\infty\left(\frac{1}{2}-0\right)=+\infty$ f تقبل الاشتقاق على $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ باعتبارها مجموع دوال تقبل الاشتقاق على R و $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. $f'(x)=1-\frac{4}{2x+1}=\frac{2x-3}{2x+1}$ f متزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ f متناقصة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -\frac{1}{2} & & \frac{3}{2} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & \| & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & -\infty & \nearrow & +\infty\ \|\ +\infty & \searrow & \frac{1}{2}-\ln 4 & \nearrow & +\infty \end{array}$
	0,25 0,25	(3 $f(x)=x$ يكافئ $\ln\lvert 2x+1\rvert=1$ يكافئ $x=\frac{e-1}{2}$ أو $x=\frac{-e-1}{2}$ إحداثيات نقطتي التقاطع: $\left(\frac{e-1}{2};\frac{e-1}{2}\right)$ و $\left(\frac{-e-1}{2};\frac{-e-1}{2}\right)$
	0,25+0,25 0,25	(4 $f'(x)=-3$ يكافئ $x=0$. كون للمعادلة حلا واحدا فإن المنحني (C_f) يقبل مماسا واحدا ميله -3 . معادلة للمماس (T): $y=-3x+2$
	0,25 0,5 الرسم 0,25 0,25 0,25 0,25	 (5 $f(0)=2$ و $f(-1)=1$ (6 $f(x)=x+m$ حلولها هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات التي معادلتها $y=x+m$. مناقشة: إذا كان $m<2$ فإن للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة. إذا كان $m=2$ فإن للمعادلة حلين احدهما معدوم والأخر سالب تمام. إذا كان $m>2$ فإن للمعادلة حلين متمايزين سالبين تماما. II- 1. من أجل كل x من $[0;+\infty[$ ، $F'(x)=2\ln(2x+1)$ .2 $A=\int_0^{\frac{3}{2}}[f(x)-(-3x+2)]dx\,cm^2=\left[-F(x)+2x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}cm^2=(7{,}5-8\ln 2)cm^2$ III- 1. من أجل كل x من $R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ، $x\neq-\frac{1}{2}$ منه $-1-x\neq-\frac{1}{2}$

وَ $g(-1-x)=\frac{3}{2}+\left\|-1-x+\frac{1}{2}\right\|-\ln[2(-1-x)+1]^2=\frac{3}{2}+\left\|-x-\frac{1}{2}\right\|-\ln(-2x-1)^2=g(x)$		
2) استنتاج أن المنحني (C_g) يقبل محور تناظر معادلته: $x=-\frac{1}{2}$	0,25	
3) من أجل $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $g(x)=f(x)$	0,25	
4) (Γ) ينطبق على (C_g) في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. ولإتمام رسم (Γ) نأخذ نظير الجزء المرسوم بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$.	0,25	
التمرين الرابع: 5,5 نقاط		
.1 من أجل $n=1$ ، $u_1=\frac{3}{2}>0$ محققة (بداية التراجع) نفرض أن $u_n>0$ محققة إلى غاية الرتبة n . (فرضية التراجع) لدينا: $u_n>0$ منه $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)>0$ أي $u_{n+1}>0$ (استنتاج التراجع)	0,25 0,25 0,5	5,5 نقاط
.2 من أجل $n=1$ ، $\ln u_1=\ln\frac{3}{2}=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ محققة (بداية التراجع) نفرض أن $\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ محققة إلى غاية الرتبة n . (فرضية التراجع) لدينا: $\ln u_{n+1}=\ln u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\ln u_n+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ $=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ محققة) استنتاج التراجع)	0,25 0,25 0,5	
.3 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^2}\le\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}$ وَ $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2}\le\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\le\frac{1}{2^2}$ وَ... $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^n}\le\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\le\frac{1}{2^n}$ بالجمع طرف لطرف نحصل على: $S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln u_n\le S_n$	0,5	
.4 $S_n=\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$ وَ $T_n=\frac{1}{4}\,\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{3}$.	0,5+0,5 0,5+0,5	
.5 أ) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2^{n+1}}u_n>0$. (u_n) متزايدة تماما. ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=\ln l$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n-\frac{1}{2}T_n\right)=\frac{5}{6}$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$ وبالتالي $\frac{5}{6}\le\ln l\le1$ من $\frac{5}{6}\le\ln l\le1$ ينتج أن $e^{\frac{5}{6}}\le l\le e$	0,25 0,5 0,25	